

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

—o0o—

NGUYỄN THỊ THANH THẢO

ĐỊNH LÝ KIỂU MARTY VỀ HỌ CHUẨN TẮC CỦA
CÁC HÀM PHÂN HÌNH

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

THÁI NGUYÊN - 2020

ĐẠI HỌC THÁI NGUYÊN
TRƯỜNG ĐẠI HỌC SƯ PHẠM

—o0o—

NGUYỄN THỊ THANH THẢO

ĐỊNH LÝ KIỂU MARTY VỀ HỌ CHUẨN TẮC CỦA
CÁC HÀM PHÂN HÌNH

Chuyên ngành: Giải Tích

Mã số: 8460102

LUẬN VĂN THẠC SĨ TOÁN HỌC

Người hướng dẫn khoa học

PGS.TSKH TRẦN VĂN TẤN

THÁI NGUYÊN - 2020

Lời cam đoan

Tôi xin cam đoan luận văn "**Định lí kiểu Marty về họ chuẩn tắc các hàm phân hình**" là công trình nghiên cứu khoa học độc lập của riêng tôi dưới sự hướng dẫn khoa học của **PGS.TSKH Trần Văn Tấn**. Các nội dung nghiên cứu, kết quả của tôi trong luận văn là trung thực và chưa từng công bố dưới bất kỳ hình thức nào trước đây; các kết quả kết quả của các tác giả khác đều có trích dẫn và chú thích nguồn gốc.

Nếu phát hiện bất kỳ sự gian lận nào tôi xin hoàn toàn chịu trách nhiệm về nội dung luận văn của mình.

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2020

Tác giả

Nguyễn Thị Thanh Thảo

Lời cảm ơn

Để hoàn thành đề tài luận văn và kết thúc khóa học, với tình cảm chân thành, tôi xin bày tỏ lòng biết ơn sâu sắc tới trường Đại học Sư phạm Thái Nguyên đã tạo điều kiện cho tôi có môi trường học tập tốt trong suốt thời gian tôi học tập, nghiên cứu tại trường.

Tôi xin gửi lời cảm ơn tới **PGS.TSKH Trần Văn Tấn** đã giúp đỡ tôi trong suốt quá trình nghiên cứu và trực tiếp hướng dẫn tôi hoàn thành luận văn tốt nghiệp này. Đồng thời, tôi xin bày tỏ lòng cảm ơn tới thầy cô trong Khoa Toán, bạn bè đã giúp đỡ, tạo điều kiện cho tôi trong suốt quá trình học tập và hoàn thiện luận văn tốt nghiệp này.

Tôi xin chân thành cảm ơn!

Thái Nguyên, ngày 16 tháng 05 năm 2020

Tác giả

Nguyễn Thị Thanh Thảo

Mục lục

Lời cam đoan	i
Lời cảm ơn	ii
Mục lục	iii
Lời mở đầu	1
1 Định lí Marty	3
1.1 Định lí Marty	3
1.2 Một mở rộng Định lí Marty của Hinkkanen	4
2 Một mở rộng Định lí Marty của Grahl và Nevo	10
3 Đạo hàm cầu trong trường hợp chiều cao	21
3.1 Một dạng mở rộng của Định lí cơ bản thứ hai	21
3.2 Tiêu chuẩn ánh xạ chuẩn tắc trên điều kiện bị chặn của đạo hàm cầu	30
Kết luận	33
Tài liệu tham khảo	34

Lời mở đầu

1. Lý do chọn đề tài

Định lí Marty (1957) về tiêu chuẩn cho họ chuẩn tắc các hàm phân hình trên một miền trong mặt phẳng phức, dưới điều kiện đạo hàm cầu bị chặn đều trên các tập con compact đóng một vai trò quan trọng nghiên cứu họ chuẩn tắc các hàm phân hình. Với mong muốn tìm hiểu về vấn đề họ chuẩn tắc các hàm phân hình thông qua kết quả có ảnh hưởng lớn này, chúng tôi chọn đề tài “Định lí kiểu Marty về họ chuẩn tắc các hàm phân hình” nhằm tìm hiểu kết quả gốc của Marty và một số phát triển của các nhà toán học sau đó.

2. Mục đích nghiên cứu

Tìm hiểu và trình bày lại một cách có hệ thống và chi tiết về tiêu chuẩn của Marty về họ chuẩn tắc, các mở rộng Định lí Marty của Hinkkanen (1993), của Grahl và Nevo (2014) và của Trần Văn Tấn (2020).

3. Đối tượng nghiên cứu

Họ chuẩn tắc các hàm phân hình, Lí thuyết Nevanlinna về sự phân bố các hàm phân hình.

5. Nội dung nghiên cứu

Chúng tôi nghiên cứu tiêu chuẩn của Marty về họ chuẩn tắc các hàm phân hình có đạo hàm cầu bị chặn đều trên các tập con compact. Từ đó nghiên cứu sự mở rộng của các định lí này tới các trường hợp mà đạo hàm cầu bị chặn đều trên tập nhỏ hơn; trường hợp biến dạng của đạo hàm cầu; trường hợp chiều cao.

Nội dung chính của luận văn gồm ba chương:

Chương 1 trình bày Định lí Marty cổ điển và sự mở rộng của Định lí Marty tới trường hợp đạo hàm cầu bị chặn đều trên các tập con compact giao tập ảnh ngược của 5 điểm phân biệt;

Chương 2 trình bày kết quả mở rộng Định lí Marty của Grahl và Nevo tới trường hợp kiểu đạo hàm cầu;

Chương 3 trình bày tiêu chuẩn chuẩn tắc của Trần Văn Tấn đối với trường hợp ánh xạ chỉnh hình vào không gian xạ ảnh.

5. Phương pháp nghiên cứu

Các phương pháp truyền thống của Giải tích phức, Ứng dụng của Lí thuyết Nevanlinna đối với ánh xạ chỉnh hình.

Chương 1

Định lí Marty

1.1 Định lí Marty

Năm 1912, Montel đưa ra khái niệm sau về họ chuẩn tắc các hàm phân hình.

Định nghĩa 1.1. Một họ \mathcal{F} các hàm phân hình trên miền $D \subset \mathbb{C}$ được gọi là chuẩn tắc nếu mọi dãy $\{f_k\} \subset \mathcal{F}$ đều tồn tại dãy con hội tụ đều theo metric cầu trên các tập con compact của D (hay tương đương là hội tụ đều địa phương) tới một hàm phân hình hoặc hàm đồng nhất bằng vô cùng.

Định lý 1.2. Một họ \mathcal{F} gồm các hàm phân hình trên miền $D \subset \mathbb{C}$ là chuẩn tắc nếu và chỉ nếu đạo hàm cầu của các hàm trong \mathcal{F} bị chặn đều trên các tập con compact của D (hay tương đương là bị chặn đều địa phương), nghĩa là, với mỗi tập con compact $K \subset D$, tồn tại hằng số dương $c(K)$ sao cho

$$f^\#(z) := \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq c(K)$$

với mọi $z \in K$ và $f \in \mathcal{F}$.

Chứng minh. Giả sử \mathcal{F} là một họ chuẩn tắc, nhưng bất đẳng thức trên không đúng. Khi đó, tồn tại tập con compact $K \subset D$ và dãy $\{f_k\} \subset \mathcal{F}$,

$\{z_k\} \subset K$, sao cho f_k hội tụ tới hàm chỉnh hình f và $f_k^\#(z_k)$ dần tới vô cùng. Do K là tập compact, nên ta có thể coi z_k hội tụ tới một điểm z_0 thuộc K . Khi đó

$$f^\#(z_0) = \lim_{k \rightarrow \infty} f_k^\#(z_k) = \infty.$$

Điều này dẫn tới mâu thuẫn.

Bây giờ ta chứng minh chiều ngược lại. Với điểm z_0 bất kì thuộc D và với $\epsilon > 0$ tùy ý, lấy $r > 0$ sao cho $K := \{z : |z - z_0| \leq r\} \subset D$. Khi đó, theo giả thiết, tồn tại $c(K) > 0$ sao cho

$$f^\#(z) := \frac{|f'(z)|}{1 + |f(z)|^2} \leq c(K)$$

với mọi $z \in K$ và $f \in \mathcal{F}$. Với mỗi $z \in K$, lấy $\gamma : [0, 1] \rightarrow D$, $\gamma(t) = (1 - t)z_0 + tz$ là đoạn nối z_0 với z . Gọi d_σ là khoảng cách cầu trên $\widehat{\mathbb{C}}$. Khi đó,

$$\begin{aligned} d_\gamma(f(z), f(z_0)) &\leq \int_0^1 \|(f \circ \gamma)'(t)\|_{\sigma, f \circ \gamma(t)} dt \\ &= \int_0^1 \frac{2|f \circ \gamma'(t)|}{1 + |f \circ \gamma(t)|^2} |\gamma'(t)| dt \\ &\leq c(K) \int_0^1 |\gamma'(t)| dt \\ &\leq c(K) \|z - z_0\| \end{aligned}$$

với mọi $z \in K$ và $f \in \mathcal{F}$. Do đó, \mathcal{F} là đồng liên tục đều. Mặt khác, $\widehat{\mathbb{C}}$ là compact, nên \mathcal{F} là chuẩn tắc. \square

1.2 Một mở rộng Định lí Marty của Hinkkanen

Trong phần này, ta xét một chiều mở rộng của Định lí Marty được đưa ra bởi Hinkkanen [2].

Định lý 1.3. Một họ \mathcal{F} gồm các hàm phân hình trên miền $D \subset \mathbb{C}$ là chuẩn tắc nếu và chỉ nếu tồn tại 5 điểm phân biệt a_1, \dots, a_5 thuộc $\widehat{\mathbb{C}}$ sao cho với mỗi tập con compact $K \subset D$, tồn tại hằng số dương $c(K)$ sao cho

$$f^\#(z) \leq c(K)$$

với mọi $z \in K \cap \bigcap_{j=1}^5 f^{-1}(a_j)$ và $f \in \mathcal{F}$.

Để chứng minh Định lý của Hinkkanen, trước hết ta phát biểu và chứng minh Bổ đề Zalcman.

Định lý 1.4. Họ \mathcal{F} các hàm phân hình trên D là không chuẩn tắc tại điểm z_0 nếu tồn tại

- 1) số thực r , $0 < r < 1$;
- 2) các điểm z_n , $|z_n| < r$, $z_n \rightarrow z_0$;
- 3) dãy số dương $\rho_n \rightarrow 0^+$;
- 4) các hàm $f_n \in \mathcal{F}$

sao cho $g_n(\xi) := g_n(z_n + \rho_n \xi) \rightarrow g(\xi)$ hội tụ đều trên các tập con compact của \mathbb{C} theo metric cầu, ở đó, $g(\xi)$ là một hàm phân hình khác hằng và $g^\#(\xi) \leq g^\#(0) = 1$.

Chứng minh. Giả sử \mathcal{F} không chuẩn tắc trên D . Khi đó theo Định lý Marty, tồn tại số r^* , $0 < r^* < 1$, dãy các điểm z_n^* trong đĩa đóng có tâm là gốc tọa độ, bán kính r^* và các hàm f_n thuộc \mathcal{F} sao cho $f_n^\#(z_n^*) \rightarrow \infty$. Cố định một giá trị r sao cho $r^* < r < 1$, và với mỗi n đặt

$$\begin{aligned} M_n &= \max_{|z| \leq r} \left(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\right) f_n^\#(z) \\ &= \left(1 - \frac{|z|^2}{r^2}\right) f_n^\#(z_n^*) \end{aligned} \quad (1.1)$$